

ピエゾ弾性板の力学特性に関する一研究

構造工学分野 正田武史

1. はじめに

ある種の結晶に機械的な力あるいはひずみを加えると電気が現れ、逆にこの結晶に電界を加えるとひずみが生じる。この性質を圧電性(piezoelectricity)といい、前者を圧電効果、後者を逆圧電効果という。また、圧電性を示す物質を圧電体 (piezoelectrics: piezo はギリシャ語で press を意味する) という [1]。圧電性は可逆的であり、電気エネルギーと機械エネルギーの相互の変換が可能なことより、土木分野においても圧電歪素子を加速度計に利用したり、橋梁構造物の振動測定センサーに利用しようとする考えが生まれている。

最近では圧電弾性体力学の理論的・解析的研究が盛んになってきており、動的問題においても Heyliger and Brooks [2] による平面ひずみ状態にある積層ピエゾ平板の自由振動解析などが行われているが、動的波動問題を取り扱った研究はほとんど無いようである。

本研究は、ピエゾ厚板の衝撃波動問題を取り扱う手法の確立を最終目標としていたが、その前段階で必要となる自由振動解析において、妥当な固有値が得られなかったため、衝撃応答解析までは至らなかった。したがって本研究では、平面ひずみ状態にある単層の直交異方性ピエゾ平板の静的な機械力学的、電気力学的性質の検討結果、および自由振動解析における固有値の計算過程を示した。その際、微分演算子法を用いて支配方程式に対する変位関数を誘導し、それを基に解析を行った。

2. ピエゾ弾性体の基礎方程式

ピエゾ弾性体の基礎方程式は、以下で構成される。

(1) 運動方程式

$$\frac{\partial s_{ij}}{\partial x_i} + F_j = \mathbf{r} \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} \quad (1)$$

(2) ひずみ 変位関係

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2)$$

(3) 構成方程式

$$s_{ij} = C_{ijkl} S_{kl} - e_{kij} E_k \quad (3)$$

$$D_i = e_{ikl} S_{kl} + e_{ik} E_k \quad (4)$$

(4) 静電荷方程式

$$\frac{\partial D_i}{\partial x_i} = 0 \quad (5)$$

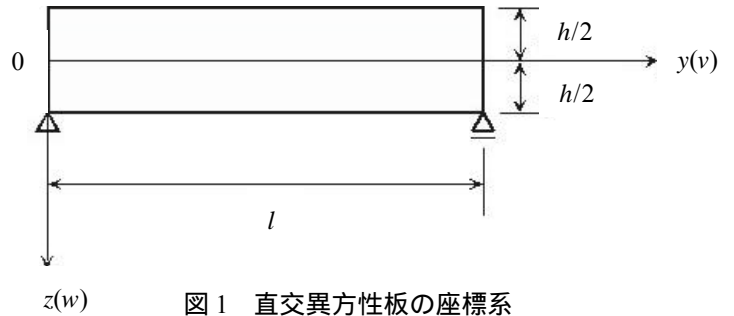


図1 直交異方性板の座標系

(5) 電界・静電ポテンシャル関係

$$E_i = -\frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (6)$$

ここに、 x_i : 座標成分, u_i : 変位成分, S_{ij} : ひずみテンソル, s_{ij} : 応力テンソル, \mathbf{r} : 物体の密度, F_i : 物体力, t : 時間, C_{ijkl} : 弾性定数テンソル, e_{ijk} : 圧電定数テンソル, e_{ij} : 誘電率テンソル, E_i : 電界の強さ, D_i : 電気変位, f : 静電ポテンシャル である。式(2), (3), (4), (6)を式(1), (5)に代入し, x に関する微分項を省略することにより, 図1に示す平面ひずみ状態での直交異方性板の基礎式(7)が得られる。

$$\begin{aligned} C_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + C_{44} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + (C_{23} + C_{44}) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \\ + (e_{32} + e_{24}) \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \mathbf{r} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \\ (C_{23} + C_{44}) \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + C_{44} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + C_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \\ + e_{24} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + e_{33} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \mathbf{r} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \\ (e_{32} + e_{24}) \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + e_{24} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + e_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \\ - e_{22} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - e_{33} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

上式(7)は、次のマトリックス形式で表すことができる。

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \\ f \end{bmatrix} = 0 \quad (8)$$

ここで L_{ij} は微分演算子である。上式を微分演算子法により解けば、

$$\det(L_{ij})H = 0 \quad (9)$$

を満足する変位関数 H によって

$$\begin{aligned} v &= CM_{k1}H \\ w &= CM_{k2}H \\ f &= CM_{k3}H \end{aligned} \quad (10)$$

として求められる． M_{ij} は行列 $[L_{ij}]$ の余因子， k は1~3のうちどれか一つに定めるものとし， C は解形式を整える定数である．本研究では $C=1, k=2$ として解析を行った．

3. 静的解析

3.1 基礎式

静的解析では，式(7)において時間項を省略したものが基礎式となる．

3.2 境界条件

平板が，両端を機械的に単純支持され，電気的條件として接地されている境界条件として，次式を用いる．

$$w = s_y = f = 0 \quad (y=0, l) \quad (11)$$

次に， $z = \pm h/2$ の上下縁での境界条件として，次の3ケースを考える．ケース1は機械的荷重 $q(y)$ を上面に載荷したもとの電気的境界条件を $f=0$ としたもの，ケース2は機械的荷重 $q(y)$ を上面に載荷したもとの電気的境界条件を $D_z=0$ としたもの，ケース3は電気的荷重を上面に載荷したものであり，以下に詳細を示す．

(1) ケース1

$$\begin{aligned} s_z &= -q(y), \quad t_{yz} = 0, \quad f = 0 \quad (z = -h/2) \\ s_z &= 0, \quad t_{yz} = 0, \quad f = 0 \quad (z = +h/2) \end{aligned} \quad (12)$$

(2) ケース2

$$\begin{aligned} s_z &= -q(y), \quad t_{yz} = 0, \quad D_z = 0 \quad (z = -h/2) \\ s_z &= 0, \quad t_{yz} = 0, \quad D_z = 0 \quad (z = +h/2) \end{aligned} \quad (13)$$

(3) ケース3

$$\begin{aligned} s_z &= 0, \quad t_{yz} = 0, \quad D_z = -D(y) \quad (z = -h/2) \\ s_z &= 0, \quad t_{yz} = 0, \quad D_z = 0 \quad (z = +h/2) \end{aligned} \quad (14)$$

3.3 解式

両端($y=0, l$)での境界条件を考慮して，変位関数 H を

$$H(y, z) = H(z) \sin py, \quad p = m\pi/l \quad (14)$$

とおき，式(9)へ代入すると， $A \sim F$ を積分定数として， $H(z)$ の解式

$$\begin{aligned} H(z) &= A \cosh s_1 z + B \sinh s_1 z \\ &\quad + C \cosh s_2 z + D \sinh s_2 z \\ &\quad + E \cosh s_3 z + F \sinh s_3 z \end{aligned} \quad (15)$$

を得る．ただし s_1^2, s_2^2, s_3^2 は，式(16)に示す s の6次式

$$l_1 s^6 + l_2 s^4 + l_3 s^2 + l_4 = 0 \quad (16)$$

の3正根である．ただし $l_1 \sim l_4$ の内容は省略する．したがって，式(10)から以下のように v, w, f が決定できる．

$$\begin{aligned} v &= \sum_{m=1}^{\infty} v(z) \cos py, \quad w = \sum_{m=1}^{\infty} w(z) \sin py, \\ f &= \sum_{m=1}^{\infty} f(z) \sin py \end{aligned} \quad (17)$$

ただし $v(z), w(z), f(z)$ の内容は省略．これらを用いて応

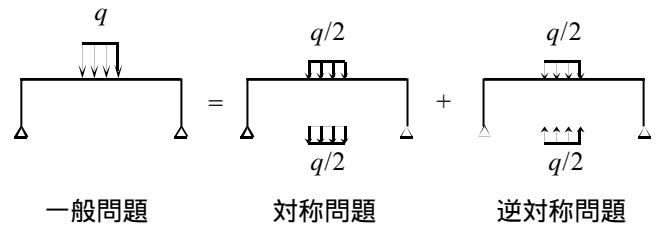


図2 解の重ね合わせ

力と電気変位などの具体式が決定でき，上の3ケースの境界条件を規定すれば，それぞれの積分定数を求めることで最終的な解が得られる．その際，便宜上，図2のように $w(-z)=w(z)$ を満たすものを対称問題， $w(-z)=-w(z)$ を満たすものを逆対称問題として解析を行った．

4. 自由振動解析

4.1 基礎式

自由振動解析の基礎式は式(7)で表される．

4.2 境界条件

両端単純支持の境界条件は，式(11)と同様である．また， $z = \pm h/2$ の上下縁での境界条件としては，次のものを用いる．

$$s_z = t_{yz} = f = 0 \quad (z = \pm h/2) \quad (18)$$

4.3 モード関数および振動数方程式の誘導

両端($y=0, l$)での境界条件を考慮して，変位関数 \bar{H} を

$$\bar{H}(y, z, t) = \bar{H}(z) \sin py \exp(i\omega t) \quad (i^2 = -1) \quad (19)$$

とおく．ここで ω は固有円振動数である．上式を式(9)へ代入すると，次の g に関する3次方程式を得る．

$$\begin{aligned} g^3 - g^2 \left(\frac{l_3^*}{l_4^*} + \frac{m_5^* R^*}{l_4^*} \right) + g \left\{ \frac{l_2^*}{l_4^*} + \frac{m_4^* R^*}{l_4^*} + \frac{m_2^* (R^*)^2}{l_4^*} \right\} \\ - \left\{ \frac{l_1^*}{l_4^*} + \frac{m_3^* R^*}{l_4^*} + \frac{m_1^* (R^*)^2}{l_4^*} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

ここで， g は

$$\bar{H}(z) = \exp(sz) \quad (21)$$

とおいたときの s を含んだ次式で表される．

$$g = \left(\frac{s}{p} \right)^2 \quad (22)$$

また， R^* は

$$R^* = \left(\frac{l^2 r w^2}{C_{33}} \right) \frac{1}{(m\pi)^2} \quad (23)$$

で定義される無次元固有値である． $l_1^* \sim l_4^*, m_1^* \sim m_5^*$ は，材料定数 C_{ij} ，圧電定数 e_{ij} ，誘電率 ϵ_{ij} によって決まる無次元数である．さて，式(20)の解は， $C_{ij}, e_{ij}, \epsilon_{ij}, R^*$ によって形式が異なる．本研究で用いた材料では， g は全て3実根であった．この場合，根 s は(1) 6実根，(2) 4実根 2虚根，(3) 2実根 4虚根，(4) 6虚根の4パターン

が考えられる。以上4パターンを根の形式によって組み合わせることにより、積分定数を含んだ $\bar{H}(z)$ が決定される。そして、それを式(10)に代入することで以下のよう v, w, f が決定できる。

$$v=v(z)\cos py, w=w(z)\sin py, f=f(z)\sin py \quad (24)$$

これらを用いて応力と電気変位などの具体式が決定でき、式(18)の境界条件を規定すれば、積分定数に関する連立方程式が得られる。ただしここでも、静的問題同様、図2のように対称問題、逆対称問題に分けて取り扱った。例として、パターン(1)の対称問題の場合について、その連立方程式をマトリックス表示したものを次に示す。ただし、 $A_1^* \sim A_3^*$ は積分定数である。

$$\begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^* \\ A_2^* \\ A_3^* \end{bmatrix} = 0 \quad (25)$$

ここで $m_1 \sim m_3, h_1 \sim h_3, x_1 \sim x_3$ は、 $C_{ij}, e_{ij}, e_{ij}, R^*, g, s$ を含む無次元数である。 $A_1^* \neq 0, A_2^* \neq 0, A_3^* \neq 0$ であるためには、係数行列式について、

$$\begin{vmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (26)$$

が成り立つ必要がある。そしてこの式がパターン(1)の対称問題の振動数方程式となる。これより求めた固有円振動数 w を式(25)に代入すると、 $A_1^* : A_2^* : A_3^*$ の比が決定できる。それを利用することにより、変位、応力、電気変位などの最終的な解、すなわちモード関数が求まる。以上の手続きを、各パターンの対称問題と逆対称問題に適用する。

5. 数値計算例

5.1 静的解析

ここでは、板厚比 $h/l=0.2$ として、機械的荷重 $q(y)$ 、電気的荷重 $D(y)$ を上面に載荷したものを考える。この時、 $q(y), D(y)$ の定義は次式である。

$$q(y) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin py, q_m = \frac{2}{l} \int_{y_1}^{y_2} q(y) \sin py dy \quad (27)$$

$$D(y) = \sum_{m=1}^{\infty} D_m \sin py, D_m = \frac{2}{l} \int_{y_1}^{y_2} D(y) \sin py dy \quad (28)$$

本文では $y_1=0.4l, y_2=0.6l$ 、すなわち $0.4l \leq y \leq 0.6l$ の範囲に等分布荷重を作用させた場合を考察した。ただし着目点は $y=l/2$ (スパン中央点) とした。また、比較のため機械的荷重を作用させた場合の変位に関しては、 $e_{ijk}=e_{ij}=0$ とした、圧電性のない場合についても計算を行った。その際 Heyliger[2] の論文に与えられている4つの材料を用いたが、そのうちの材料A(圧電セラミックス(PZT-4))について、図3~5に示している。材料Aの材料定数の値は以下の通りである。

$$C_{11}=C_{22}=81.3, C_{33}=64.5, C_{12}=0.329, C_{13}=C_{23}=0.432,$$

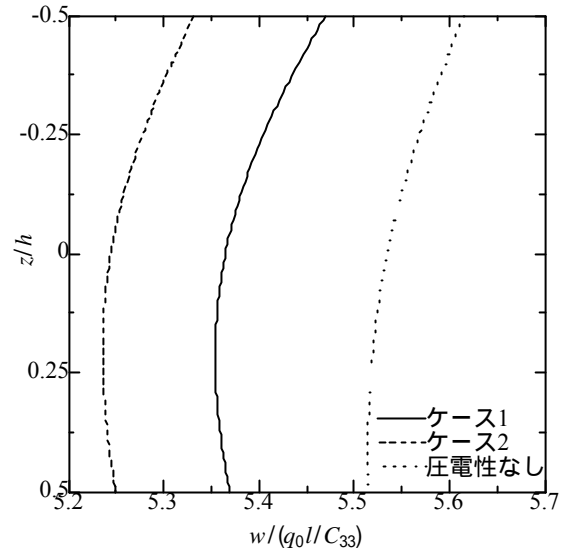


図3 機械的荷重 $q(y)$ が作用する場合の変位 w の板厚方向分布

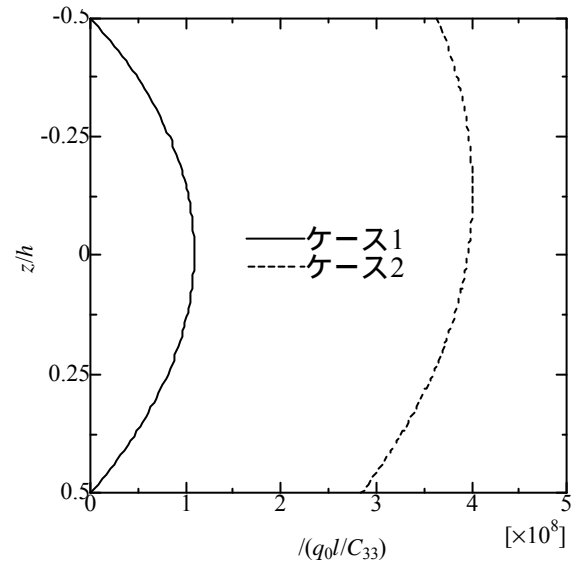


図4 機械的荷重 $q(y)$ が作用する場合の静電ポテンシャル ϕ の板厚方向分布

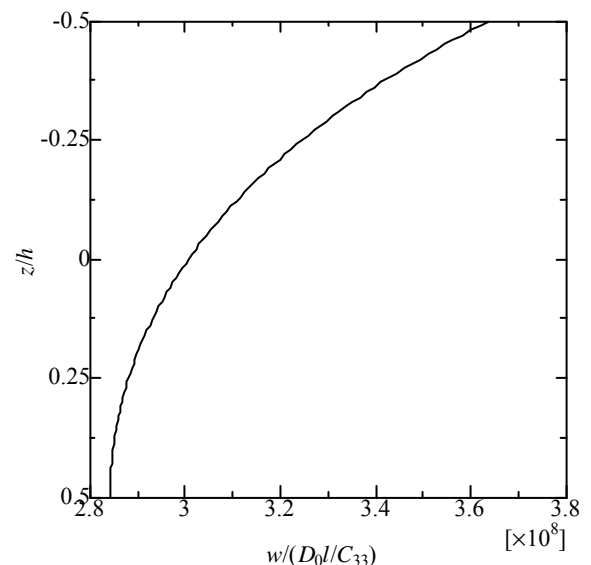


図5 電気的荷重 $D(y)$ が作用する場合の変位 w の板厚方向分布

$C_{44}=C_{55}=25.6, C_{66}=30.6, \rho_{24}=12.72, \rho_{31}=\rho_{32}=-5.20, \rho_{33}=15.08,$
 $e_{33}/\epsilon_0=1300, e_{11}/\epsilon_0=1475$

各材料定数の単位は, C_{ij} : Gpa, e_{ij} : C/m² であり, ϵ_0 は真空の誘電率である. なお, 図は全て無次元化分布として表している. 図 3 より, 変位の応答は, 圧電性を有する場合の方が圧電性を有しない場合に比べ, 小さくなる事が分かる. また, 図 4 から, 機械的荷重を作用させた場合に電位が発生していることが分かり, 図 5 から, 電気を作用させた場合に変位が現れていることが分かる. すなわち, 圧電性の現れが確認できる.

5.2 自由振動解析

式(26)を始めとする振動数方程式からは, パラメータとしての材料定数 $C_{ij}, e_{ij}, \rho_{ij}$, 板厚比 $h/l, p=mp/l$ ($m=1,2,3,\dots$) にしたがって, 無限個の固有円振動数 w_{mn} ($n=1,2,3,\dots$) が生じる. この振動数方程式は, w_{mn} に関する超越方程式であり, 解析的に解くことは困難であるので, Regula-Falsi 法 (はさみうち法) を用いて数値的に解くことにする. その際, 式(23)で定義した無次元固有値 R^* を用いる.

まず, [2]の文献で与えられていた材料 A を用いて, $h=0.01\text{m}, r=1, m=1$ ($p=p/l$), $h/l=0.25$ のもとの R^* を求めた. [2]の文献にもこれと同じ条件で計算した w の値が掲載されていたので, それと比較することにした.

表 1 無次元固有値 R^* の比較

Heyliger[2]	対称問題	逆対称問題
0.06949	0.05422	0.91657
1.38229	1.05355	1.26042
7.88881	1.23693	1.36432
23.64467	1.26047	2.50961
33.47371	2.56119	4.30112
57.53902	105.62891	154.22926
102.23164	422.62544	513.30297
135.16582	530.08412	1081.42891
159.92093	609.65134	1863.06629
228.92774	1229.77270	2120.24752

表 1 に, [2]の文献の計算値 w を R^* に換算したものと, 本研究で計算した対称問題, 逆対称問題の R^* を昇順に 10 個示す. 本研究の計算値は, [2]の計算値に比べ, 5 目までは小さい値で接近しすぎており, 両者は一致しない. そこで, 以下のような検証を行った.

- (1) 式展開やプログラムの見直しを何度も実施した結果, おかしな点は見つからなかった.
- (2) 式(20)の 3 次方程式が正確に解けているか検証を行った. その方法としては, 横軸に g をとった 3 次関

数のグラフを書き, 横軸との交点が計算値と一致することを確かめること. また, 本研究ではこの 3 次方程式をカルダノ法を用いて解析的に解いたが, Regula-Falsi 法 (はさみうち法) を用いて数値的に解いたものと一致することを確かめること. その結果, 一致することが確認され, 手法の信頼性を得た.

- (3) 横軸に R^* をとった振動数方程式のグラフを書き, 横軸との交点が計算値と一致するか確認した. その結果, 両者は一致していた.
- (4) 以上から, [2]の文献の材料定数に誤りがあるのではないかと考え, 他の文献[3]に掲載されている材料定数についても同様に計算を行ったが, 望ましい結果は得られなかった.
- (5) [2]の文献には誘電率として $\epsilon_{33}/\epsilon_0, e_{11}/\epsilon_0$ が与えられていたが, ここで用いられている真空中の誘電率 ϵ_0 の処理について検討した. 本研究では誘電率を扱う際, [2]の文献の値に $\epsilon_0 (=8.8537 \times 10^{-12} \text{C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)$ を掛けたものを用いたが, [2]の文献には, このことについて全く触れていなかったため, ϵ_0 を掛けない場合についても計算を行った. 材料 A についてのその結果を表 2 に示す. しかし, この計算においても望ましい結果は得られなかった.

表 2 ϵ_0 の処理に関する無次元固有値 R^* の比較

対称問題		逆対称問題	
ϵ_0 を掛ける場合	ϵ_0 を掛けない場合	ϵ_0 を掛ける場合	ϵ_0 を掛けない場合
0.05422	0.02572	0.91657	0.02572
1.05355	0.05230	1.26042	0.89377
1.23693	0.98211	1.36432	1.18200
1.26047	1.18200	2.50961	1.26042
2.56119	1.26047	4.30112	2.06030
105.62891	2.06030	154.22926	4.00592
422.62544	218.83522	513.30297	165.90983
530.08412	664.34705	1081.42891	763.60064
609.65134	1636.69959	1863.06629	1791.80000
1229.77270	3050.42929	2120.24752	2842.65620

以上(1)~(5)のように, 最終的に好ましい結果が得られなかった. 本研究の最終目標であった衝撃波動問題を取り扱う手法の確立には, この自由振動解析において正確な解が必要となる.

参考文献

- [1] 池田拓郎: 圧電材料学の基礎, オーム社, 1984.
- [2] Heyliger, P. R. and Brooks, S.: Free vibration of piezoelectric laminates in cylindrical bending, International Journal of Solids and Structures, Vol. 32, No. 20, pp. 2945-2960, 1995.
- [3] Tiersten, H. F.: Linear Piezoelectric Plate Vibrations, Plenum Press, New York, 1969.