

# 衝撃荷重を受けるコセラ平板の波動伝播に関する研究

構造工学分野 長谷川 京子

## 1. はじめに

Cosserat 兄弟によって提唱された偶応力理論は、通常の弾性論の下での応力に加え、物体の局所的な回転に抵抗する偶応力を連続体理論に導入したものであり、材料の微視構造や寸法効果を考慮する場合に有用とされる。その後この理論は、Mindlin[1]により線形偶応力理論として弾性体の構成式に導入され、その結果新しい材料定数が増え、応力テンソルの対称性は失われる。

本研究では、この偶応力理論を衝撃問題に適用し、偶応力を考慮に入れたコセラ平板が衝撃荷重を受ける際の波動伝播特性について動弾性論に基づき解析を行った。解析手法は固有関数展開法を用いた。この手法を用いると、対象とする問題の固有関数(モード関数)を求めることができれば構造物の動的応答解析で通常用いられているモード法と同一の手順で解析を行うことができる。数値計算例においては、通常の弾性論との比較を通じ、コセラ平板が衝撃荷重を受ける際に、偶応力が動的挙動に及ぼす影響について検討した。

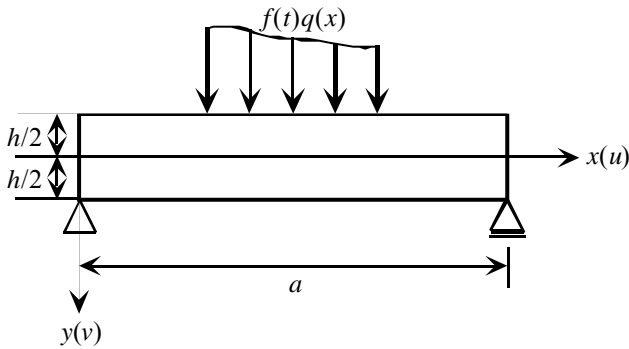


図-1 座標系

## 2. 基礎式

図-1 はここで取り扱う平面ひずみ状態にある平板の座標系である。辺長は  $a$ 、板厚は  $h$  で、 $x=0, a$  の両端で単純支持されており、上面に作用する衝撃荷重は時間関数  $f(t)$  と空間関数  $q(x)$  の積で表される。2次元コセラ体の座標  $x, y$  方向の変位を  $u, v$ 、応力成分を  $s_x, s_y, t_{xy}, t_{yx}$ 、偶応力を  $m_x, m_y$  とすれば、力のつり合い式とモーメントのつり合い式は次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial t_{yx}}{\partial y} &= r\ddot{u} \\ \frac{\partial t_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial s_y}{\partial y} &= r\ddot{v} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} + t_{xy} - t_{yx} = 0 \quad (2)$$

ここで  $r$  は密度、ドットは時間  $t$  に関する微分である。次に平面ひずみ状態での応力-変位関係は、 $G$  を横弾性係数、 $n$  をポアソン比とすれば、

$$\begin{aligned} s_x &= \frac{2G}{(1-2n)} \left[ (1-n) \frac{\partial u}{\partial x} + n \frac{\partial v}{\partial y} \right] \\ s_y &= \frac{2G}{(1-2n)} \left[ n \frac{\partial u}{\partial x} + (1-n) \frac{\partial v}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

$$t_{xy} + t_{yx} = 2G \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (4)$$

である。また偶応力と回転成分  $w_z$  の関係は、 $B$  を力の次元を持つ新しい材料定数として次式で与えられる。

$$m_x = 4B \frac{\partial w_z}{\partial x}, \quad m_y = 4B \frac{\partial w_z}{\partial y} \quad (5)$$

$$w_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (6)$$

従って、せん断応力と変位の関係は式(2)および式(4)~(6)により次のように得られる。

$$\begin{aligned} t_{xy} &= B \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - l^2 \nabla^2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \\ t_{yx} &= B \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + l^2 \nabla^2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (7)$$

ここで  $\nabla^2$  はラプラシアンであり、 $l$  は  $E$  をヤング率とすると、

$$l^2 = \frac{2(1+n)B}{E} = \frac{B}{G} \quad (8)$$

で定義される偶応力の考慮により新しく導入された材料定数で、長さの次元を持つ。

以上より、式(3)、(7)を式(1)に代入すると、変位  $u, v$  で表した基礎式が次のように得られる。

$$\begin{aligned} L_x(u, v) &= \frac{(1-2n)(1+n)}{E} r\ddot{u} \\ L_y(u, v) &= \frac{(1-2n)(1+n)}{E} r\ddot{v} \end{aligned} \quad (9)$$

$L_x, L_y$  は微分演算子であり、具体的表記すれば、

$$L_x(u,v) = (1-n)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-2n}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \frac{1-2n}{2}l^2\nabla^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$L_y(u,v) = \frac{1-2n}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (1-n)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - \frac{1-2n}{2}l^2\nabla^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

となる。本問題の境界条件は、次式で与えられる。

$$v = s_x = m_x = 0 \quad (x=0, a)$$

$$s_y = t_{yx} = m_y = 0 \quad (y=+h/2)$$

$$s_y = -f(t)q(x), \quad t_{yx} = m_y = 0 \quad (y=-h/2)$$

また、静止の初期条件は次のようになる。

$$u = v = 0 \quad (t=0)$$

$$\dot{u} = \dot{v} = 0 \quad (t=0)$$

なお空間荷重のフーリエ級数は

$$q(x) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin a_m x; \quad q_m = \frac{2}{a} \int_0^a q(x) \sin a_m x dx \quad (13)$$

である。ただし、

$$a_m = \frac{m\pi}{a} \quad (m=1,2,3,\dots) \quad (14)$$

### 3. 衝撃応答解析

式(9)の解を次のように置く。

$$u(x,y,t) = u^s(x,y,t) + u^d(x,y,t)$$

$$v(x,y,t) = v^s(x,y,t) + v^d(x,y,t)$$

ここで  $u^s, v^s$  は式(9)の慣性項を無視した場合の準静的解で、静的解を  $U^s, V^s$  とすると以下のように与えられる。

$$\begin{bmatrix} u^s(x,y,t) \\ v^s(x,y,t) \end{bmatrix} = f(t) \begin{bmatrix} U^s(x,y) \\ V^s(x,y) \end{bmatrix} \quad (16)$$

一方  $u^d, v^d$  は慣性力の影響を考慮した場合の擾乱解で、固有関数  $U_{mn}(x,y), V_{mn}(x,y)$  と未定の時間関数  $Q_{mn}(t)$  との積よりなる級数で次のよう与えられる。

$$\begin{bmatrix} u^d \\ v^d \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn}(t) \begin{bmatrix} U_{mn}(x,y) \\ V_{mn}(x,y) \end{bmatrix} \quad (17)$$

未定の時間関数  $Q_{mn}(t)$  は、式(15)を式(9)に代入し、仮想仕事の原理より導かれる固有関数の直交性と静止条件を利用すれば次式となる。

$$Q_{mn} = Z_{mn} \cos w_{mn} t \quad (18)$$

$$Z_{mn} = \int_V (U^s U_{mn} + V^s V_{mn}) dV / N_{mn}^2 \quad (19)$$

ただし、 $w_{mn}$  は固有円振動数、 $N_{mn}$  はノルムである。

## 5. 数値計算例

### 1) 諸元

数値計算例では、板厚比  $h/a = 0.2$  の平板上面中央に載荷幅  $c = 0.2a$  の部分等分布荷重  $q_0$  が、時間に関してステップ状 [ $f(t) = H(t)$ ] に作用する場合を扱った。材料定数についてはポアソン比を  $n = 0.3$  とし、板厚  $h$  に対する新しい材料定数  $l$  の比、回転寸法比  $l/h$  を 0.03, 0.05 と変化させ、数値計算を行った。また通常の弾性論 ( $l/h = 0$ ) における解析も行いコセラ平板の解析と比較した。なお以下の応答計算は全て無次元化して行い、時間については以下に示す平板内を伝播する縦波速度  $c_1$  で基準化した無次元時間  $t$  を用いた。

$$t = \frac{c_1 t}{h} \quad (20)$$

これは縦波  $c_1$  が板厚  $h$  を進むのに要する時間が 1 であるということの意味する。

### 2) コセラ体を伝播する波について

通常弾性体を伝播する応力波には、その変位の方が進行方向と同じである

$$\text{縦波：速度 } c_1 = \sqrt{\frac{(1-n)E}{(1-2n)(1+n)\rho}} \quad (21)$$

と、変位の方向と垂直である

$$\text{横波：速度 } c_2 = \sqrt{\frac{E}{2(1+n)\rho}} \quad (c_1 > c_2) \quad (22)$$

が存在する。しかしコセラ体を伝播する応力波は、

$$\text{縦波：速度 } c_1 \quad (23)$$

$$\text{横回転波：速度 } c_s = c_2 \sqrt{1 + (a_m l)^2} \quad (c_s > c_2) \quad (24)$$

の2つであり、この横回転波  $c_s$  は波長に依存している。すなわち偶応力の影響を受け分散性を有するようになった。なお、縦波、横波(横回転波)の次に到達するレイリーの表面波については後述する。

### 2) 固有値分布特性

ここでは衝撃応答計算に必要な固有円振動数  $w_{mn}$  に代わって横波速度  $c_2$  で基準化した無次元固有値  $W_{mn}$

$$W_{mn} = \frac{w_{mn} h}{c_2} \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots) \quad (25)$$

を用いた。偶応力を考慮しない場合と  $l/h = 0.05$  の場合の固有値分布特性を図-2 に示す。なお  $a_m h$  をパラメータにとり、 $x$  軸に関して対称振動、逆対称振動に分けた。図より偶応力を考慮すれば分布密度が低くなっているのがわかる。また、図において、最小固有値の1本目の線が収束する値がレイリー波速度となっている。この収束値は回転寸法比を大きくするほど大きな値となっている。つまり、回転寸法比を大きくするほど、レイリー波速度は速くなる。

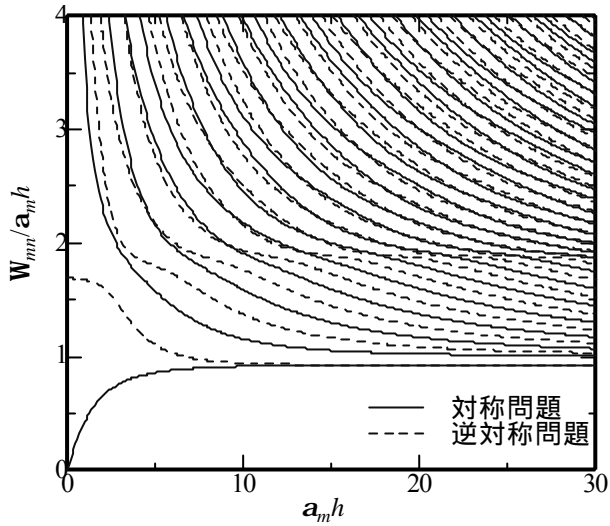


図-2(a) 偶応力を考慮しない場合の固有値分布

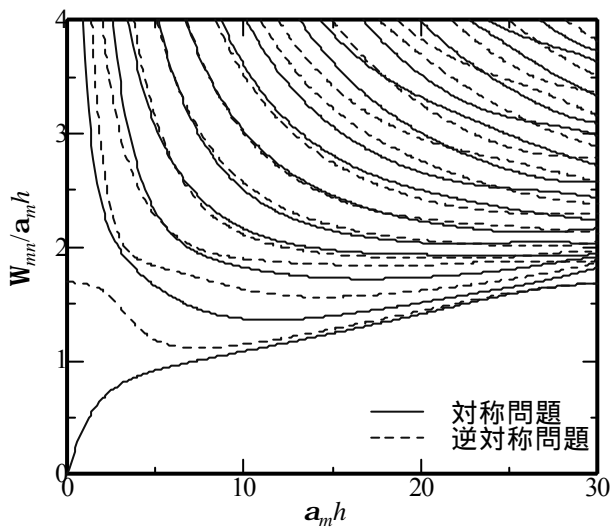


図-2(b)  $l/h = 0.05$  の固有値分布

### 3) 衝撃応答

次に図-3 に示す着目点に注目して、各点での応力の応答曲線を示す。

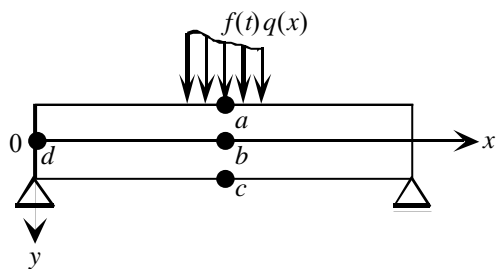


図-3 衝撃応答の着目点

#### a) 応力 $s_y$ の応答曲線

図-4 に着目点  $b$  における応力  $s_y$  の初期 ( $0 \leq t \leq 5$ ) 応答曲線を示す。縦波の到達時刻 ( $t = 0.5$ ) はいずれの場合も同時刻である。偶応力を考慮しない場合ではその後横波が現れるが、コセラ体では偶応力を考慮することで分散性を有するようになった横回転波が到達する。

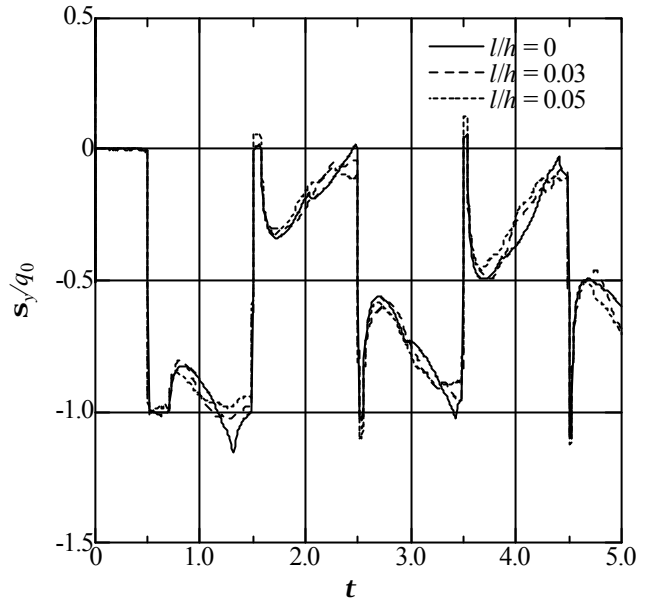


図-4 中央点  $b$  における応力  $s_y$  の初期応答曲線

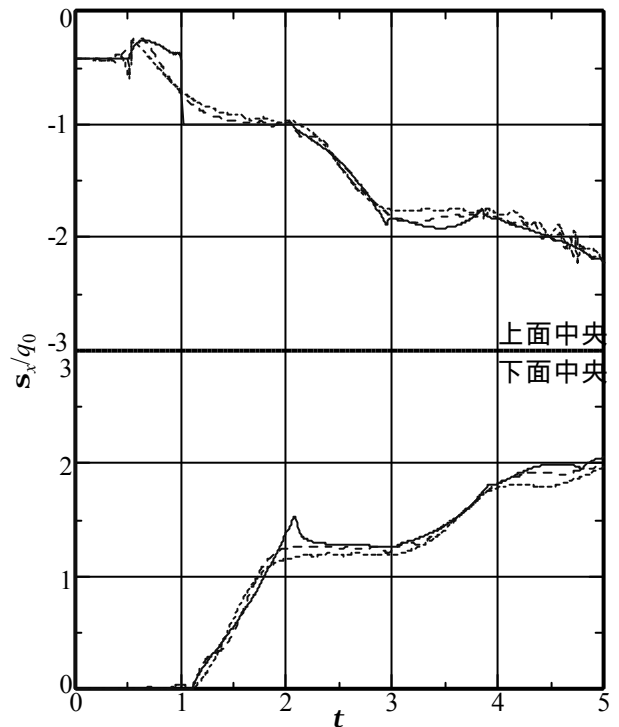


図-5 平板上下面における  $s_x$  の初期応答曲線

横波が到達した  $t = 1.3$  付近を見ると、横波の到達時刻と比較して回転寸法比を大きくするほど横回転波の到達が早くなっているのがわかる。また横回転波は波長に依存してゆるやかな波の形状となっているため応答値が減少しているのがわかる。なお図中の凡例は以後の図についても同様としている。

#### b) 応力 $s_x$ の応答曲線

図-5 に応力  $s_x$  の初期 ( $0 \leq t \leq 5$ ) 応答曲線を示す。着目点は平板上面中央点  $a$  および下面中央点  $c$  である。上面での応答を見ると、いずれの応答も衝撃荷重が作用した瞬間から応答値を持っている。これは作用圧縮荷

重  $q_0$  と釣り合う圧縮応力  $s_y = -q_0$  による  $x$  方向のひずみが拘束され、応力  $s_x$  が生じるためである。また偶応力を考慮しない場合  $t = 1.0$  付近に急激な応答変化が見られる。これは Rayleigh 波の影響が表れているものと考えられる。レイリー波は通常分散のない波であるが、偶応力を考慮することにより固有円振動数が境界の条件を受け分散性を有するようになっていく。そして回転寸法比を大きくするほどその到達時刻は  $a_m l$  を無限大に近づけたときのレイリー方程式の解  $t = 0.5282$  に近づいていき、その後ゆるやかな波の形状を示す。次に下面での応答でも  $t = 2.0$  付近を見れば、横回転波が横波より早く到達し、応答値が小さくなっているのがわかる。

### c) せん断応力 $t_{xy}$ の応答曲線

着目点  $d$  におけるにおけるせん断力  $t_{xy}$  および  $t_{yx}$  の初期 ( $0 \leq t \leq 10$ ) 応答曲線を図-6 に示す。偶応力の導入により  $t_{xy} \neq t_{yx}$  となっている。応答はいずれの場合も縦波の到達 ( $t = 2.06$ ) とともに始まり、ここでも横波が到達する  $t = 4.0$  付近を見ると、回転寸法比を大きくするほど、横回転波が横波より早く着目点に到達し、応答値も小さくなっているのがわかる。

### d) 変位 $v$ の応答曲線

着目点  $b$  における変位  $v$  の長期 ( $0 \leq t \leq 150$ ) 応答曲線を図-7 に示す。図より、回転寸法比を大きくするほど応答値は小さくなり、周期は短くなっているのがわかる。無次元周期 ( $T$ ) の計算値は  $l/h = 0, 0.03, 0.05$  の順に  $T = 65.062, 64.5547, 63.6907$  である。

## 6. まとめ

本研究は、コセラ平板の応力波伝播特性をとらえ偶応力の影響を検討することを目的として解析を行った。以下に得られた結果をまとめる。

- (1) 固有値分布については、回転寸法比を大きくするほど分布密度が低くなった。
- (2) 平板中央点の応力  $s_y$  の応答において、コセラ平板内を伝播する波は縦波と横回転波の2つである。縦波の到達時刻はいずれの場合も同時刻であるが、次に到達する横回転波は分散性を有しており、分散のない横波より回転寸法比を大きくするほど早く到達し、かつ応答値を減少させる。
- (3) 平板上面中央点での応力  $s_x$  において応答に現れるレイリー波は、通常の弾性体では分散のない波であるが、偶応力を考慮することで分散性を有するようになり、回転寸法比を大きくするほど、その到達時間は  $a_m l$  を無限大に近づけたときのレイリー方程式の解に近づく。
- (4) 平板中央点の変位  $v$  の応答では、回転寸法比が大きくなるほど応答値が小さくなり、周期は回転寸法比が大きくなるほど短くなる。

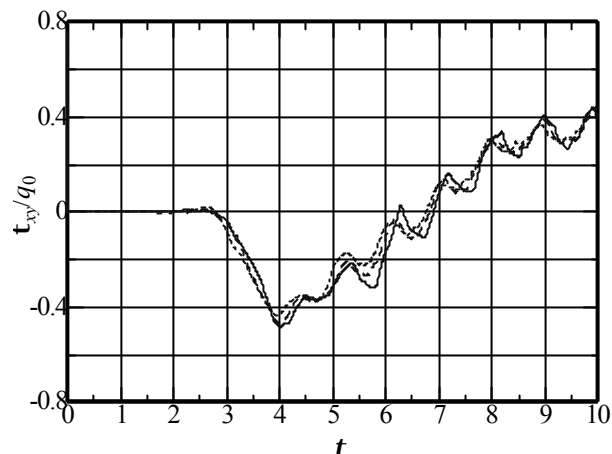


図-6(a) 点  $d$  におけるせん断応力  $t_{xy}$  の初期応答曲線

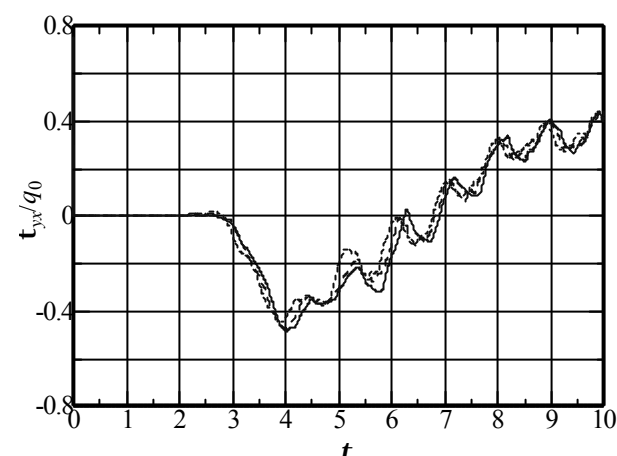


図-6(b) 点  $d$  におけるせん断応力  $t_{yx}$  の初期応答曲線

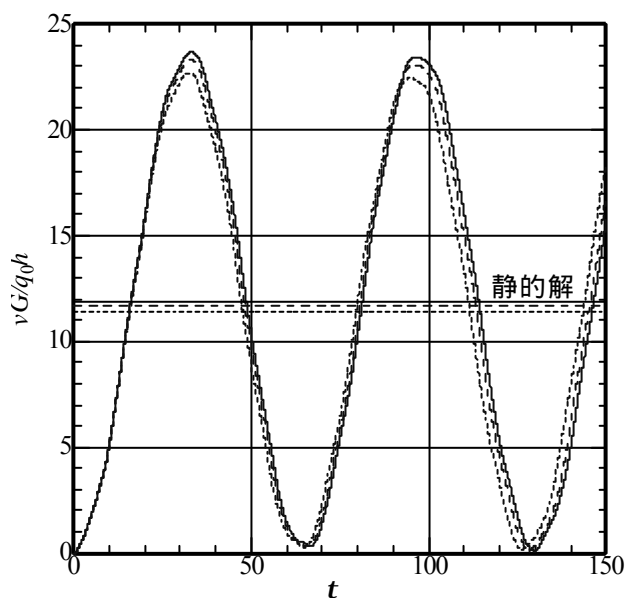


図-7 中央点  $b$  における変位  $v$  の長期応答曲線

## 参考文献

- [1] Mindlin, R. D.: Influence of Couple-stresses on Stress Concentrations, *Experimental Mechanics*, Vol. 3, No. 1, pp. 1-7, 1963.